S E N S 2 0 0 7
Third Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, NANOTECHNOLOGY, SAFETY
27–29 June 2007, Varna, Bulgaria

ОРБИТАЛНА ЕВОЛЮЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТ В ПЛАНЕТАРНИ СИСТЕМИ

Пламен Тренчев, Костадин Шейретски, Георги Киров

Space Research Institute –- Bulgarian Academy of Sciences
e-mail: ptrenchev@space.bas.bg

Key words: *планетарни системи, нелинейна динамика, бифуркация, астероиден пояс, резонанс, секуларна динамика*

Abstract: *Откриването на все повече планети извън Слънчевата система дава нарастващи възможности за изследване и разбиране на процесите на формиране и еволюция на различни типове планетарни системи, включително Слънчевата система. На практика, динамичните характеристики на много от тези системи са твърде различни от динамиката на планетите от Слънчевата система. Въпреки това, съществуват достатъчно сходства между планетите от и извън Слънчевата система. Целта на настоящата работа е да се изследва орбиталната еволюция и устойчивост на планетарна система с отчитане на взаимодействието с астероиден пояс в системата посредством стандартен анализ на фазовото пространство.*

Проведено е изследване на орбиталната еволюция и устойчивост на планетарни системи при отчитане на взаимодействието с вътрешен пояс от малки тела посредством стандартен анализ на фазовата равнина. Наред с фиксираните точки, съответстващи на Кеплерови орбити, съществуват и други фиксирани точки около вътрешната и външната граница на пояса. Проведеният анализ показва, че вероятността за устойчиво движение на планетите около вътрешната граница на пояса е по-голяма от вероятността за устойчиво движение около външната му граница. При провеждане на съответен анализ по отношение на Слънчевата система става ясно, че би могло да се дефинира естествен механизъм на орбитална класификация на по-големите обекти от пояса на Кайпер, с което достатъчно надеждно да се обясни липсата на тези обекти на разстояние над 50 а.е.

Откриването на все повече планети извън Слънчевата система дава нарастващи възможности за изследване и разбиране на процесите на формиране и еволюция на различни типове планетарни системи, включително Слънчевата система. Според Extrasolar Planets Catalog понастоящем са детектирани около 200 планети с маси в интервала 0.16 до 17 M_J (M_J - маса на Юпитер) и главни полуоси в интервала 0.04 а.е. до 4.5 а.е. при изключително голяма вариация в ексцентрицитетите. Става ясно, че динамичните характеристики на много от тези планети са твърде различни от динамиката на планетите от Слънчевата система.

Въпреки това съществуват достатъчно сходства между планетите от и извън Слънчевата система. Детектирани са, например, планети с маса, съизмерима с масата на Юпитер, движещи се по кръгова орбита с голям период. Нещо повече, някои планетарни системи претендират да имат диск от прах и малки частици, поради което могат да се разглеждат като млади аналози на пояса на Куйпер в Слънчевата система. Ако тези дискове са достатъчно масивни, те биха могли да играят съществена роля при определянето на орбиталните елементи на планетите. Terquem & Papaloizou [2002] демонстрират интересен механизъм за обясняване на динамиката в откритите планетарни системи – масивните планети се формират във вътрешната част на системата и се движат по кръгови орбити вследствие на приливното взаимодействие с диска, докато слабо-масивните планети се формират в по-външната част на системата и взаимодействат с вътрешната. По този начин ексцентрицитета на масивните планети нараства, което е в съответствие с наблюденията. Въпреки че диска е възможно да бъде частично опразнен и постепенно да става все по-малко масивен, твърде е възможно една част от тях да е оцеляла понастоящем, подобно на Астероидния пояс и пояса на Кайпер в Слънчевата система и тези пояси могат да играят важна роля в цялата динамична история на планетите и на планетарната система като цяло.

Поради това е важно да се направи обобщен анализ на решенията за динамичните системи с отчитане на взаимодействията между планетите и поясите. Подобен анализ е извършен от Jiang & Yeh [2003] за пояс с плътност c/r, където c е константа. Поради твърде сложният вид на гравитационната сила на пояса, включващ сложни елиптични интеграли, удачно е да се използват опростени аналитични формули за оценка на силата. Основен извод, който се налага, е че вътрешната част на пояса е по-устойчива от неговата външна част по отношение динамиката на планетите. Това е картина, която се наблюдава в Астеродиния пояс в Слънчевата система.

По същество се изследва орбиталната еволюция на планета, която се движи около централна звезда и взаимодейства с пояс от планетезимали. Поясът е пръстеновиден с вътрешен радиус r_1 и външен радиус r_2. Параметрите за дължина и време са така избрани, че да могат лесно да бъдат сравнявани с размерностите в нашата Слънчева система. Както е добре известно, в Слънчевата система съществуват два пояса: Астероиден пояс във вътрешната част на системата, и пояс на Кайпер във външната част. В случая удачно е да се изберат следните параметри: за r_1 = 3 и r_2 = 6, защото, първо, когато дължината е 1 а.е., интервала $[r_1,\ r_2]$ обхваща приблизително областта, заета от Астероидния пояс; второ, при дължина от 10 а.е. интервала $[r_1,\ r_2]$ обхваща приблизително региона на пояса на Кайпер.

Приема се, че разстоянието между централната звезда и планетата е r, като r е функция на времето. Сумарната сила *f*, действаща върху планетата, включва комбинираното въздействие на звездата и пояса. Гравитационната сила от централната звезда е

(1) $$f_s = -\frac{m}{r^2},$$

като в случая сме приели, че маста на звездата е 1 и гравитационната константа *G* = 1.

От друга страна, гравитационната сила f_b от пояса, действаща върху планетата, е сложна и включва елиптични интеграли. В този случай най-доброто решение е стойността на тази сила да се пресметне числено.

Тъй като планетезималите в пояса най-често са неравномерно разпределени, планетата ще изпитва сила на триене при преминаването си през областта на пояса. Тази сила е пропорционална на радиалната скорост на планетата dr/dt:

(2) $$\tilde{f}_\alpha = -\alpha\rho(r)\frac{dr}{dt},$$

където α е коефициент на триене, а ρ е честотния профил на пояса.

Тъй като компонентата $d\theta/dt$ на планетарната скорост се игнорира в израза за силата на триене, ъгловият момент *l* има консервативен характер, и следователно:

(3) $$mr^2 d\theta = l dt.$$

Това означава, че втория закон на Кеплер е все още валиден тук и поради това θ може да се използва като независима променлива.

Означаваме с $u = 1/r$ и с отчитане на уравнение (3), имаме:

(4) $$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{l}{m}\frac{du}{d\theta}.$$

Уравнение (2) може да бъде записано като:

(5) $$\tilde{f}_\alpha = -\alpha\rho(r)\left[\frac{l}{m}\frac{du}{d\theta}\right]\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha\rho l}{m}\frac{du}{d\theta}.$$

Тъй като планетата изпитва сила на триене само в зоната на пояса, може да се дефинира следното ограничение:

(6) $$f_\alpha = \beta\tilde{f}_\alpha,$$

където

(7) $$\beta = \begin{cases} 1, & ако \quad r_1 < r < r_2 \\ 0, & ако \quad r > r_2 \text{ или } r < r_1 \end{cases}.$$

Уравнението на движение за планетата е

(8) $$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{mf\left(\frac{1}{u}\right)}{l^2u^2},$$

където $u = 1/r$, m, l са съответно масата и ъгловия момент на планетата, f е сумарната силна, действаща върху планетата. Това уравнение е в сила, само когато нямаме наличие на нерадиални сили. За описване положението на планетата използваме полярни координати (r, θ). Тъй като

(9) $f = f_s + f_b + f_\alpha$, уравнение (8) добива вида:

(10) $$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + -\frac{m^2}{l^2} - \frac{m^2 f_b}{l^2u^2} - \frac{\alpha\beta\rho}{lu^2}\frac{du}{d\theta}$$

Следователно, уравнението на движение за разглежданата система може да бъде записана във вида:

(11) $$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= v \equiv h_1(u,v) \\ \frac{du}{d\theta} &= -u - \beta k_1 v\frac{\rho}{u^2} + k_2 - k_2\frac{f_b}{u^2} \equiv h_2(u,v) \end{aligned},$$

където $k_1 = \alpha / l$, $k_2 = m^2 / l^2$.

Посредством линеаризационен анализ за собствените стойности λ, съответстващи на фиксирани точки $(u_*, 0)$, получаваме:

(12) $$\left(\left.\frac{\partial h_1}{\partial u}\right|_{(u_*,0)} - \lambda\right)\left(\left.\frac{\partial h_2}{\partial v}\right|_{(u_*,0)} - \lambda\right) - \left(\left.\frac{\partial h_1}{\partial v}\right|_{(u_*,0)} - \lambda\right)\left(\left.\frac{\partial h_2}{\partial u}\right|_{(u_*,0)} - \lambda\right) = 0,$$

където

(13) $$h_1(u,v) = v, \quad h_2(u,v) = -u - \frac{\beta(k_1\rho v)}{u^2} + k_2 - \frac{k_2 f_b}{u^2}.$$

Следователно, уравнение (12) добива вида:

(14) $$\begin{aligned} &\left(\left.\frac{\partial h_1}{\partial u}\right|_{(u_*,0)} - \lambda\right)\left(\left.\frac{\partial h_2}{\partial v}\right|_{(u_*,0)} - \lambda\right) - \left(\left.\frac{\partial h_1}{\partial v}\right|_{(u_*,0)} - \lambda\right)\left(\left.\frac{\partial h_2}{\partial u}\right|_{(u_*,0)} - \lambda\right) = 0 \\ &\lambda^2 + \frac{\beta k_1 \rho}{u_*^2}\lambda + \left(1 - \left.\frac{2\beta k_1 \rho v}{u^3}\right|_{(u_*,0)} + k_2\left.\frac{\partial B}{\partial u}\right|_{(u_*,0)}\right) = 0 \end{aligned}$$

където $B = \dfrac{f_b}{u^2}$.

Когато планетата е извън зоната на пояса, което е в сила при $\beta = 0$, имаме:

(15) $$\lambda = \pm\sqrt{-1 - k_2\left.\frac{\partial B}{\partial u}\right|_{(u_*,0)}}.$$

В такъв случай имаме два възможни случая:

Случай **I** : При $-1 - k_2\left.\dfrac{\partial B}{\partial u}\right|_{(u_*,0)} > 0$, фиксираната точка е тип седло;

Случай **II** : При $-1 - k_2\left.\dfrac{\partial B}{\partial u}\right|_{(u_*,0)} < 0$, фиксираната точка е тип център.

Когато планетата се намира в зоната на пояса, то $\beta = 1$, и следователно:

(16) $$\lambda = \frac{k_1\rho}{2u_*^2}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 4\left(1 + k_2\left.\frac{\partial B}{\partial u}\right|_{(u_*,0)}\right)\left(\frac{u_*^2}{k_1\rho}\right)^2}\right].$$

Определяме $\Delta = 1 - 4\left(1 + k_2 \left.\frac{\partial B}{\partial u}\right|_{(u_*,0)}\right)\left(\frac{u_*^2}{k_1 \rho}\right)^2$. Възможни са три случая:

Случай **I** : При $\Delta < 0$ имаме две собствени стойности $\lambda_{1,2} = -a \pm bi$ при $a,b > 0$, фиксираната точка е устойчива спирала;

Случай **II** : При $0 < \Delta < 1$ двете собствени стойности са отрицателни – фиксираната точка в случая е устойчив възел;

Случай **III** : При $\Delta > 1$ едната собствена стойност е положителна, а другата – отрицателна и фиксираната точка е тип седло.

Заключение

Разгледана е орбиталната еволюция и устойчивост на планетарни системи с отчитане на взаимодействието между планета и пояса посредством стандартен анализ на фазовата равнина. Трябва да отбележим, че фиксираните точки във фазовата равнина съответстват на кръгови орбити в орбиталната равнина. Когато масата на телата в пояса е малка, бифуркационната диаграма е почти права линия, т.е. имаме Кеплерови орбити. Когато масата на телата в пояса е по-голяма, имаме повече от една фиксирани точки, като едната съответства на Кеплерова орбита, а другите фиксирани точки винаги са близо или до вътрешния край $u = 1/r_1$ или до външния край $u = 1/r_2$ на пояса.

Литература

1. A l l e n R.L., G.M. B e r n s t e i n , R. M a l h o t r a . 2001, The edge of the Solar System, The Astrophysical Journal, 549, 241-244.
2. J i a n g I.-G., Ip,W.- H. 2001, The planetary system of upsilon Andromedae, Astron.& Astrophys., 367, 943-948
3. K a u l a k y s B., F. I v a n a u s k a s , T. M e s k a u s k a s . 1999, Synchronization of chaotic systems driven by identical noise, Int. J. Bifurcation and Chaos 9, 533-53
4. M u r r a y C.D., S.F. D e r m o t t . 1999, Solar system dynamics, Cambridge University Press
5. Y e h L.-C., I.-G. J i a n g . 2001, Orbital evolution of scattered planets, The Astrophysical Journal 561, 364-371.
6. T h o m m e s E.W., M.J. D u n c a n, H.F. L e v i s o n. 1999, The formation of Uranus and Neptune in the Jupiter-Saturn region of the Solar System, Nature, 402, 635-638